

1-Egyenletes mozgás

.1) Egyenletesen haladó autó figyelmes utasai 15 perc alatt 20 db km-követ tudnak megszámolni az ablakon kitekintve. (Az út mellett minden egész kilométert kővel jelöltek meg.) Mekkora lehet a kocs sebessége?

$$(76 \frac{\text{km}}{\text{h}} \leq v < 84 \text{ km/h})$$

A megtett távolság nem ismert pontosan.

.2) Kati reggelente gyalog megy a 2 km-re lévő iskolába és 24 perc alatt szokott odaérni. Tegnap reggel félúton jutott eszébe, hogy otthon hagyta a tornaszákját. Gyorsan rohant haza, otthon 5 percig keresgélt, majd az előbbi sebességével rohant az iskolába, így éppen nem késett el.

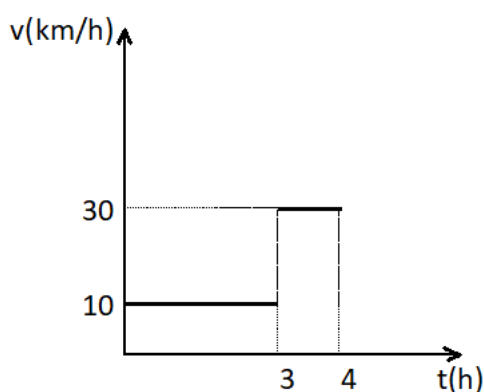
- o Mekkora volt a teljes elmozdulása és megtett útja? **(2 km, 4 km)**
- o Mennyi ideig és mekkora sebességgel szaladt hazáig? **(140 s; 7,14 m/s)**
- o Rajzold meg a hely-idő és sebesség idő grafikonokat.

A hely-idő grafikonon jól eligazodhatsz.

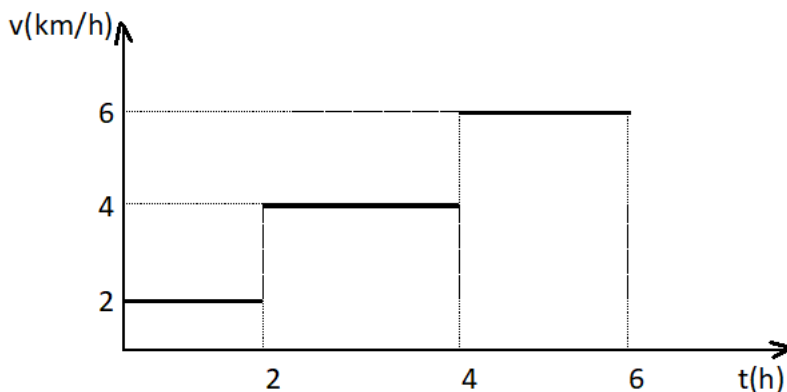
Mit jelent a grafikonon az, hogy azonos sebességgel rohant haza, majd az iskolába?

A futással töltött idők aránya ismert.

.3) Mekkora a testek átlagsebessége a mozgás teljes idejére számítva?



(15 km/h, 4 km/h)



A görbe letti terület az elmozdulást adja.

.4) .a) Egymástól 20 km távolságból egyszerre indul két jármű, egyikük sebessége 11 m/s. Mekkora a másik sebessége, ha szemben haladnak egymással és 12 perc múlva találkoznak? **(60,4 km/h)**

.b) Egy 90 km/h sebességű személyautóval egyirányba, a vele párhuzamos vasútvonalon 54 km/h sebességű vonat halad. A vonat kezdetben 2 km-rel jár az autó előtt.

- o Mennyi idő alatt és mekkora úton éri utol az autó a vonatot? **(200 s, 5 km)**
- o Ábrázoljuk az hely-idő grafikonokat közös koordináta rendszerben!

Rögzítsük a koordináta rendszerünket az autóra vagy vonatra, hogy a relatív sebességet használhassuk.

.5) Egy 340 m hosszúságú tehervonat 17 s alatt halad el egy sínek mentén álló fa mellett. Mennyi ideig tart, amíg teljesen áthalad a 250 m hosszú hídon? **(29,5 s)**

Mekkora a vonat sebessége,

Mekkora távolságot tesz meg, amíg teljesen áthalad a hídon?

.6) A 22 m széles úttest közepén 2 m/s sebességgel halad egy 5 m hosszú, 2 m széles autó. A járdáról akkor lépünk le, amikor a kocs eleje a legközelebb van hozzánk. Mekkora sebességgel haladhatunk a járdára merőlegesen, hogy megállás nélkül kelhessünk át az úttesten? **(legfeljebb 4 m/s)**

Mennyi idő alatt halad el előttünk az autó?
Ennél kevesebb idő alatt még ne érjünk oda!

.7) Mekkora távolságot tesz meg a vonat, ha a közbülső állomásokon összesen 1 órát áll, a szomszéd állomások között 50 km/h sebességgel halad, és a végállomások közötti átlagsebessége 40 km/h? **(200 km)**

Jelöld a távolságot ismeretlennel, és írd fel az egyenletet, melyet az átlagsebesség definíciója követel.

.8) Egy test s_1 utat v_1 sebességgel, ezt követően s_2 utat v_2 sebességgel tesz meg.

- Mekkora az átlagsebessége, ha a test a test egy szakaszon oda-vissza mozog, azaz $s_1 = s_2$?
(v_1 és v_2 **harmonikus közepe**: $v = 2v_1v_2/(v_1+v_2)$)
- *Minek kell teljesülnie, hogy az átlagsebesség a sebességek számtani közepe (átlaga) legyen?
(**azonos ideig kell haladnia v_1 és v_2 sebességgel**)

Az átlagsebesség definícióját használd.

A második kérdésnél algebrai átalakításokra is szükség van.

.9) Egy gépkocsi először 3 óráig 80 km/h sebességgel, azután 2 óráig 50 km/h sebességgel haladt ellentétes irányba.

- Hol van az indulástól számított 4 óra múlva? **(190 km)**
- Mikor van az indulástól számított 170 km távolságra? **(127,5 perc ill. 4,4 h)**
- Rajzold le az hely-idő, sebesség-idő és út-idő grafikonok.
- A hely-idő grafikon segít. Mennyi idő telt el a 2. szakaszból?
- A 170 km távoli pontban kétszer is van.

.10) Egy gépkocsivezetőnek 100 km-t kellene megtennie 1 óra 20 perc alatt. El is indul, de 25 perc után meg kell fordulnia egy elveszett csomag miatt, majd 5 percig megy visszafelé változatlan nagyságú sebességgel, és megtalálja a csomagot. Mekkora legyen ezután a sebessége, hogy időre érkezzen? (A megfordulások ideje elhanyagolható.) **(90 km/h)**

Mikor és hol van akkor, amikor a csomagot megtalálja?

.11) Gépkocsival adott időpontra kell érkezniünk egy városba. 64 km/h átlagsebességgel egyenletesen haladva pontosan érkezniünk. Az út negyed részénél vesszük észre, hogy a rendelkezésre álló idő harmada már eltelt. Mekkora sebességgel kell ezután haladnunk, hogy időre odaérjünk? **(72 km/h)**

Az terv szerinti út hányad részét, a terv szerinti idő hányad része alatt kell még megtenni?

.12) Egy kerékpáros dimbes-dombos vidéken halad A-ból B-be, melyek között nincsen vízszintes útszakasz. A lejtőkön 32 km/h, az emelkedőkön 8 km/h a sebessége. Mekkora az átlagsebessége az oda-vissza útra számítva? **(12,8 km/h)**

Ami oda emelkedő, az visszafele lejtő, és fordítva.

.13) Két szomszédos falu között az út dimbes-dombos. A helyenként található vízszintes szakaszok összes hossza a teljes távolság harmada. Tibor, aki lejtőn 27 km/h, emelkedőn 9 km/h és vízszintesen 18 km/h sebességgel tud biciklizni, egyik napon a két falu közötti utat oda és vissza pihenés nélkül tette meg.

- Mekkora volt az átlagsebessége? **(14,73 km/h)**
- Mekkora kellene lennie a vízszintes szakasz hosszának, hogy az átlagsebesség 16 km/h legyen? **(5/8-ad rész)**
- Ami oda emelkedő, az visszafele lejtő, és fordítva. Jelöld s_1 , s_2 , s_3 -mal az egyik irányú mozgás során az emelkedő, vízszintes és lejtős szakaszok összhosszát, majd alkalmazd az átlagsebesség képletét.
- Jelöld p paraméterrel a keresett hányadot, írd fel ezzel az átlagsebességet, majd oldd meg az adódó egyenletet.

.14) Egy vonat 108 km/h sebességgel halad egy hosszú fallal párhuzamosan. Egy utas elsüt egy pisztolyt és a visszhangot 2 s múlva hallja meg. A hang sebessége 340 m/s. Milyen távol van a fal a síntől? **(338,7 m)**

A rajzodon vizsgálj meg a hang és a vonat útját. Azok felét hozd kapcsolatba a fal távolságával.

.15) Állandó sebességgel haladó vasúti szerelvény mellett egy motorkerékpáros 12 s alatt ér a vonat elejétől a végéig, ellentétes irányban 48 s alatt halad el a vonat mellett. Mekkora a vonat hossza és sebessége, ha a motoros sebessége 60 km/h? **(36 km/h, 320 m)**

Rögzítsd a koordináta rendszeredet az egyik szereplőre, és abban látszó relatív sebességeket vizsgálj. A relatív elmozdulások azonosak.

.16) Lefelé haladó mozgólépcsőn lefelé sétálva, 1 perc alatt érünk le. Kétszer nagyobb relatív sebesség esetén 45 s elég, hogy leérjünk. Mennyi idő alatt lehet leérni a lépcsőn állva? **(90 s)**

Most a földhöz rögzített koordináta rendszerből szemlélődj. Ebben az elmozdulások azonosak mindhárom esetben.

.17) Egy folyó szélessége 200 m, sebessége 7,2 km/h. Rajta egy csónak halad, a vízhez viszonyított 3 m/s sebességgel.

Az alábbi esetekben határozzuk meg, hogy milyen irányba kell eveznie az átkelő csónaknak, mennyi idő alatt ér át, és hol köt ki a túlsó parton, ha...

- a) ...a lehető legrövidebb idő alatt szeretne átérti, **(partra merőlegesen; 66,67 s múlva; 133,3 m-rel lejjebb)**
- b) ...a legrövidebb úton szeretne átmenni, **(a folyásiránnyal 131,8°-os szöget bezáróan; 89,44 s; szemben köt ki)**
- c) ...a parthoz képest a legkisebb nagyságú sebességgel szeretne átérti? **(ez lehetetlen)**
- d) Hol ér partot, ha a folyásirányhoz képest 120°-os szögben evez? **(38,49 m-rel lejjebb, 76,98 s múlva)**
- e) A túlsó part bármelyik pontját elérheti-e megfelelő evezéssel? **(igen)**
- f) Számítsuk ki a fenti esetekben a csónak parthoz viszonyított sebességét! **(3,606m/s; 2,236m/s; - ; 2,645m/s)**

A csónak parthoz viszonyított sebességvektorát ($\mathbf{v}_{cs(p)}$) a csónak vízhez képesti ($\mathbf{v}_{cs(v)}$) és a víz parthoz képesti ($\mathbf{v}_{v(p)}$) sebesség-vektorainak összege adja.

- a) $\mathbf{v}_{cs(p)}$ -nek most a lehető legnagyobb vetületet kell adnia a folyóra merőlegesen.
- b) $\mathbf{v}_{cs(p)}$ most merőleges a partra.
- c) $\mathbf{v}_{cs(p)}$ hosszára a háromszög-egyenlőtlenség alsó korlátot ad, de az nem elérhető.
- d) $\mathbf{v}_{cs(p)}$ komponenseit külön kell számolni. Segít a szabályos háromszög fele!
- e) $\mathbf{v}_{cs(p)}$ iránya dőfi ki a túlsó partból a kikötés helyét.
- f) Pitagorasz-tétel.

.18) Egy motorcsónak sebessége állóvízben négyszerese a folyó sebességének. A csónak a szemközti kikötőbe egyenes pályán 1 perc alatt szokott átérti. Legutóbb a motorja elromlott, már nem húzott úgy mint eddig, ezért az út 4 percig tartott. Hányad részére csökkent a csónak állóvízbeli sebessége az eredetihez képest? **(34,8%-ára)**

A $\mathbf{v}_{cs(p)}$ irányát a „szemközti kikötő” feltétel határozza meg, nagyságát a Pitagorasz-tétel.

Az két evezési idő aránya pedig a $\mathbf{v}_{cs(p)}$ vektorok arányával kapcsolatos, a folyó sebessége nem változik.

.19) Az esőcseppek függőleges irányban, 6 m/s-os sebességgel esnek, és a vonatablakon a vízszintessel 30°-os szöget bezáró csíkokat húznak. Mekkora sebességgel megy a vonat? **(10,39 m/s)**

Az eső vonathoz képesti sebességvektora a talajhoz képesti sebességvektorokból adódik: $\mathbf{v}_{e(v)} = \mathbf{v}_{e(t)} + \mathbf{v}_{t(v)} = \mathbf{v}_{e(t)} - \mathbf{v}_{v(t)}$.

.20) Egy ágyú elsütése miatt keletkező fényfelvillanás és ágyúdörej észlelése között az ágyú felé 18 km/h sebességgel mozgó kerékpáros 40 m-t tesz meg. A hangsebesség 330 m/s. Az elsütés pillanatában milyen messze volt a kerékpáros az ágyútól? **(2680 m)**

Rajzolj!

A fény azonnal ott van, a hang csak később ér oda a kerékpárhoz.

A kerékpáros mozgásának ideje megegyezik a (szembe jövő) hang idejével.

.21) Nyílt, egyenes pályán egyenletesen haladó vasúti kocsinak a sínekkel párhuzamos oldalait a sínekre merőleges irányból érkező lövedék üti át. A kimeneti nyílás a bemeneti nyíláshoz képest –vízszintes irányban – 5 cm-rel van eltolódva. A kocsi szélessége 5 m, sebessége 54 km/h. Mekkora a lövedék sebessége? **(1500 m/s)**

A be- és kimeneti nyílás eltolódásnak oka, hogy amíg a lövedék átér, addig a vonat előre megy. Közben az idők azonosak.

Kevésbé unalmas feladatok?

.22) *[Pólya György feladata]: Két város között a diákok kerékpártúrát szerveztek. Az emelkedőn 12 km/h, a lejtőn 24 km/h, vízszintesen pedig 16 km/h sebességgel haladva, az oda-vissza utat pihenés nélkül 6 h alatt tették meg.

- Milyen messze van egymástól a két város? **(48 km)**
 - A fenti feladat nem oldható meg bármely három sebességadattal. Milyen kapcsolatnak kell lennie a megadott három sebesség között, hogy a feladat megoldható legyen? **(a vízszintesen mért sebesség a másik kettő harmonikus közepe legyen)**
- Ami odafelé lejtő, az visszafelé emelkedő. Az átlagsebesség definícióját kell használni.
- Paraméteresen számolva adódik a válasz.

.23) *Ökör húz egy hosszú fatörzset. Szeretnénk tudni a fatörzs hosszát, de az ökör nem akar megállni. Menetirányban elhaladva a fatörzs mellett 15-öt lépünk, majd vele ellentétesen haladva 10-et. Lépéseink mind egyenlő hosszúak voltak és mindkettőnk sebessége állandó.

- Hány lépés a fatörzs hossza? **(12 lépés)**
- Hogyan fejezhető ki a rönk valódi hossza, ha a kétirányú lépéshosszak a és b ? **(a és b harmonikus közepe)**

A sebességünk és a lépéshosszunk állandóságából adódik, hogy minden lépésünk megtételéhez ugyanannyi időre van szükség: t . Az ember sebessége v , az ököré u legyen a talajhoz képest. A rönk hossza h .

A talajhoz képest vizsgálódva:

Egyenletrendszer adódik a két mozgásra (rajzolj!):

$$\text{egyirányba } (15t)v = (15t)u + h,$$

$$\text{ellentétes irányba } h = (10t)v + (10t)u$$

Kiejtve h -t, $v=5u$ adódik. Ezért pl. a 2. egyenletből: $h=(12t)v$, azaz a v sebességű ember ezt $12t$ idő alatt, 12 lépéssel teszi meg.

Relatív mozgást vizsgálva:

A relatív elmozdulások azonosak. Így $\frac{v-u}{v+u} = \frac{10}{15}$. Ebből $v=5u$.

Most - ugyanúgy a relatív mozgást vizsgálva - hasonlítsuk az álló fatörzs melletti – feltételezett - elhaladást pl. a szemben haladással: $\frac{v+u}{v} = \frac{l}{10}$, ha az álló fatörzs mellett l lépéssel haladunk el.

.24) *Egy halász lefelé evez a folyón. A híd alatt áthaladva csáklója a vízbe esik, de ezt csak fél óra múlva veszi észre. Azonnal visszafordul és a csáklóját a hídtól 5 km-rel lejjebb találja meg.

- Mekkora folyó sebessége, ha a halász felfelé és lefelé is ugyanakkora erővel evez (a vízhez képest)? **(1,389 m/s)**
- Mi lenne a válasz, ha a halász a folyón felfelé evezve ejtette volna el a csáklóját (a többi adat ugyanaz)? **(5 km/h)**

Ötlet1:

A parthoz rögzített koordináta-rendszerben megoldható a feladat: Készítsünk rajzot a vízbeeséskor és a visszafordulás pillanatában.

Ha v az ember vízhez képesti, u pedig a víz parthoz képesti sebességének nagysága, akkor a visszafordulásig a csáklója a hídtól $0,5h*u$ -val távolodott, míg az ember a csáklójától további $0,5h*v$ -vel.

Visszafordulás után ez utóbbi távolságot szemben haladva teszi meg a csáklya és az ember, akiknek a parthoz képest ugyan u és $v-u$ a sebessége, de a relatív sebességük a szemben haladás miatti összeadódás miatt éppen v . Tehát a találkozásig szintén $0,5$ óra telik el, mialatt a csáklya további $0,5 h*u$ -t haladt előre a parthoz képest.

(Nagy!)ötlet2:

Rögzítsük a koordináta rendszert a folyó vízének sebességével utazó csákyához! Ebben a halász visszafordulás előtt és után azonos ideig mozog. Mennyit halad ezalatt a híd?

Ha a halász *felé* evezve vesztené el a csákyát a híd alatt, akkor a fenti koordináta-rendszerben a halász ellentétes irányban mozog, de a híd ugyanúgy.

.25) *Egy széles folyón északi irányba, a parthoz képest 4 m/s sebességgel halad egy hajó. A hajó a vízhez képest $2\sqrt{3}$ m/s=3,464 m/s sebességgel halad. A víz sebessége a parthoz képest 2 m/s.

- Milyen irányba folyik a folyó és milyen irányba halad a hajó a vízhez képest? (**60° és 30° az északi irányhoz képest, csak ellentétes oldalon**)
- Mi a válasz, ha az adatok rendre 5 m/s, 6 m/s, 4 m/s? (A szöveget szerkesztéssel határozhatod meg.) (**82,8°, 41,4°**)

Használjuk a sebességösszeadási szabályt: $\mathbf{v}_{h(p)} = \mathbf{v}_{h(v)} + \mathbf{v}_{v(p)}$.

Ismerjük fel a három vektor hossza alapján az általuk alkotott háromszög -szögeit is megadó-specialitását. Általános esetben a háromszög szerkeszthető, szögei mérhetőek.

.26) **A 200 m széles folyón a csónak sebessége a vízhez képest 1 m/s, míg a folyó sebessége a parthoz képest 2 m/s. A csónak a legrövidebb úton szeretne áthaladni a folyón. Hol fog kikötni a túlsó parton? (**346,4 m-rel lejjebb**)

A csónak a vízhez képesti sebességvektorának irányát tetszőlegesen választhatja. Rajzoljuk fel a csónak összes lehetséges sebességvektorát (előbb a vízhez képest, majd a parthoz képest).

Ezek közül azt a sebességvektort keressük, amely legnagyobb szöget zár be a parttal.

A rajzon keressük a szabályos háromszög felét.

.27) *Egy folyó szélessége 200 m, de a víz sebessége a parttól mért távolsággal arányosan növekszik a part mentén mért 0 m/s-ról a folyó közepén mért 5 m/s-ra. Az indulás helyéhez képest hol köt ki a túlsó parton az a csónak, melynek a vízhez viszonyított sebessége mindvégig merőleges a folyás irányára, és nagysága 8 m/s? (**62,5 m-rel lejjebb**)

A változó vízsebesség úgy kezelhető, hogy gondolatban a parttal párhuzamos, azonos szélességű sávokra osztjuk a vizet, és egy-egy sáv belsejében a vízsebességet azonosnak tekintjük.

Mivel az evezés sebessége állandó, minden sáv belsejében *ugyanannyi időt* tölt el a csónak, így a víznek a sebességfüggvénye (a lefelé sodródásé) nem csak a parttól mért távolságtól függ lineárisan, hanem az elindulástól számított időtől is. Emiatt számolhatunk átlagos sodródási sebességet, $(5+0)/2 = 2,5$ m/s-ot. Ezzel sodródik lefelé egészen addig, amíg át nem ér, összesen $200/8 = 25$ s ideig.

(Valójában intergálszámítás történt: Ha a folyó sebessége közepén u , akkor a parttól mért x távolságban a sodródási sebesség az egyenes arány miatt: $v_s(x) = u \cdot x / (d/2)$).

A v sebességű evezés során a parttól x távolságra lévő Δx széles sávban eltölt $\Delta t = \Delta x / v$ időt, ami alatt a sávon áthaladva lefelé sodródik $\Delta h = \Delta t \cdot v_s = u \cdot v^2 / d \cdot x \cdot \Delta x = 0,00625/m \cdot x \cdot \Delta x$. Ennek összegzése az indulástól a folyó közepéig az $\int_0^{d/2} 0,00625/m \cdot x dx$ integrál kiszámítását jelenti, aminek szemléletes jelentése a görbe alatti háromszögterület kiszámítása. Így az integrálás helyett egyszerű területszámítást végezhetők.)

.28) *Egyenes pályán - közvetlenül a pálya mellett álló – órház felé mozdony közelít $v=90$ km/h sebességgel és 6 s időn keresztül sípjelet ad. A hang sebessége a levegőben 330 m/s attól függetlenül, hogy a hangforrás hogyan mozog.

- Mennyi ideig hallja a sípjelet az órháznál álló ör? És ha a mozdony távolodik? (**5,55; 6,45 s**)
- Oldjuk meg a feladatot általánosan is! [**közeledéskor $t' = t(1-v/c)$, távolodáskor $t' = t(1+v/c)$**]

A hang a levegőhöz képes halad a megadott sebessége, azt a forrás mozgása nem befolyásolja.

A forrás mozgása a kibocsátott hullámvonulat teljes hosszát befolyásolja: Ha a forrás állna, akkor a hullámvonulat végének kibocsátásakor az eleje már $c \cdot 6s$ távolságban lenne, így teljes hossza $c \cdot 6s$ lenne.

A közeledő vonat esetén a vég kibocsátásakor az eleje most is ugyanott van (hangsebesség nem függ a forrástól!), de a hullámvonulat vége a vonat sebessége miatt $v \cdot 6s$ -mal közeledett az eleje felé, így a vonulat hossza most $(c-v) \cdot 6s$ lesz. Ez a hullámvonulat c sebességgel robog át az állomáson, az ör mellett, éppen $(1-v/c) \cdot 6s$ idő alatt.

(Mivel ugyanannyi hullámhegy kevesebb idő alatt halad el az őrről, ezért a hangot nagyobb frekvenciájúnak, magasabbnak érzékeli, mintha azt álló vonat bocsátotta volna ki. Ez a Doppler-effektus)

.29) *A gőzkalapács percenként $n=30$ ütést tesz.

- Milyen időközönként és percenként hány ütést hall az a megfigyelő, aki a kalapáctól $v=10$ m/s sebességgel távolodik, illetve hozzá közeledik? **(távolodva 29,09 ütés, 2,0625 s-onként, ill. közeledve 30,91 ütés, 1,941 s-onként)**
- Oldjuk meg általánosan is! **[távolodva $n'=n(1-v/c)$, közeledve $n'=n(1+v/c)$]**

Ha az ütések t időtartamonként követik egymást, akkor két egymást követő ütés hangjai egymástól $c \cdot t$ távolságra, c sebességgel haladnak a megfigyelő felé.

A megfigyelő azonban $c+v$ relatív sebességet érzékel közeledés esetén. Így $c \cdot t$ relatív elmozduláshoz tartozó $t' = c \cdot t / (c+v)$ időt érzékel a két ütés között.

$n=1$ perc/ t , illetve $n'=1$ perc/ t' .

.30) *Két kerékpáros egymás felé halad 10 km/h sebességgel. Amikor egymástól 20 km-re vannak, egy légy az első orráról elindulva a második orráig repül, az úthoz viszonyított 15 km/h sebességgel. Ott azonnal visszafordul és ugyanazon sebességgel repül az első orráig, ott azonnal visszafordul, ... stb.. Mindezt a kerékpárosok találkozásáig folytatja. Mekkora utat tesz meg a légy összesen? **(15 km)**

Ne próbáljuk a légy által megtett szakaszokat egyenként kiszámolni, és összegezni, mert végtelen mértani sort kapunk.

Elhelyett arra gondoljunk, mennyi ideig repül a légy.

.31) *Két repülőgép azonos magasságban, egymásra merőlegesen halad pályáik metszéspontja felé, amelytől egy adott pillanatban 3 km és 2,5 km távolságra vannak, sebességeik állandóak, rendre 800 km/h és 600 km/h. Mikor lesznek egymáshoz legközelebb, és mekkora ez a távolság? **(14,04 s, 200 m)**

A gépeknek a pályák metszéspontjától számított távolságainak az időfüggése felírható.

Ebből a gépek távolságainak négyzete Pitagorasz- tétellel számolható. Ezt a függvényt kell minimalizálni.

A függvény másodfokú, a minimum meghatározásában segít a teljes négyzetté alakítás.

.32) *Az egyenes országúttól 50 m távolságra egy ember áll. Az úton, tőle 200 m távolságra egy 36 km/h sebességű autót lát közeledni.

- Milyen irányba kell szaladnia, hogy az autót elérje, ha futási sebessége 3 m/s? **(Az egyenes legközelebbi pontjának irányához képest $19,08^\circ$ -kal az autó elé, avagy $50,09^\circ$ -kal utána)**
- Mekkora a legkisebb sebesség, amivel még elérheti az autót? **(2,5 m/s)**

Jelölje az útnak az emberhez legközelebbi pontját K. Az embernek nem a K pont kell futnia!

Jelölje a K ponttól az autó felé felvett találkozási pontot T, az autó eredeti helyét A. Legyen $KT=x$.

Olyan egyenletet kell felírni mely kifejezi, hogy ugyanakkor érnek a T pontba. Ez egy gyökös egyenlet lesz, melyet négyzetre emelve másodfokú egyenlet adódik. Az egyik megoldás azt fejezi ki, hogy a T találkozási pont a KA szakaszon van, a másik azt, hogy T lehet az egyenesen az A ponttól távolabb is. ($x=17,29$ m ill. $-55,60$ m)

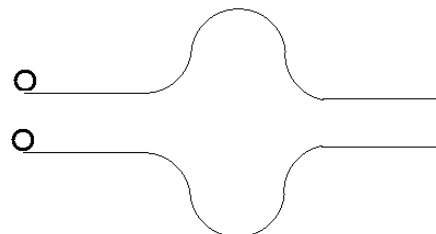
A második kérdésre ugyanezen gondolatmenettel, csak paraméteresen számolva kaphatunk választ. A másodfokú egyenlet diszkriminánsának nemnegatívnak kell lennie. Most sem K pont felé kell futni.

.33) *Két, kezdetben azonos sebességgel haladó golyó gurul végig a két pályán. Melyik ér előbb a végére? **(az alsó)**

A golyó sebessége a dombon kisebb (a völgyben nagyobb) mint a vízszintes szakaszokon.

A dombon töltött idő több (a völgyben töltött kevesebb) annál az időnél, mint ami alatt a görbe szakasz hosszát megtenné a golyó a vízszintes mozgás sebességével.

Így a felső golyó kevesebb (az alsó pedig több) idő alatt ér a pálya végére, mintha teljes útját (minkét golyónál ugyanaz!) a kezdősebességével tenné meg.



.34) *Egy autó szélvédő üvege a vízszintessel 50 fokos szöget zár be. Megfigyeltük, hogy 80 km/h sebesség alatt a függőleges irányba eső esőcseppek „lefelé” folynak az ablakon, ezen sebesség fölött pedig az esőcseppek „felfelé” csúsznak le a szélvédőről.

- Mekkora a függőlegesen eső cseppek sebessége? (**67,1 km/h**)
- Ha hiányozna az autóból a szélvédő, akkor egy adott távolság megtétele során nagyobb vagy kisebb sebességgel érdemes menni, hogy az autóba minél kevesebb víz kerüljön? (Mit gondolsz, mielőtt kiszámolnád?) (**gyorsan**)
- Hogyan kell haladni akkor, ha a jármű (hiányzó) szélvédője függőleges, akár egy buszé? (**mindegy**)
- Hogyan kell haladni akkor, ha a jármű (hiányzó) szélvédője $\phi = 30^\circ$ -kal „előre” dől, akár egy kombájné? (**legfeljebb 38,8 km/h**)

- Az esőnek a szélvédőhöz képesti sebességvektora dönti el, hogy merre felé csúsznak az esőcseppek a szélvédőn. Ennek szélvédőre merőleges komponense „eltűnik” a becsapódáskor, a párhuzamos komponens megmarad, a sofőr számára ezzel látszik mozogni az eső a szélvédőn.

- Készítsünk egy pillanatfelvételt az autó indulásakor, és jelöljük meg a térben azokat az esőcseppeket, melyek az autó mozgása során majd az autóba esnek a hiányzó szélvédőn keresztül!

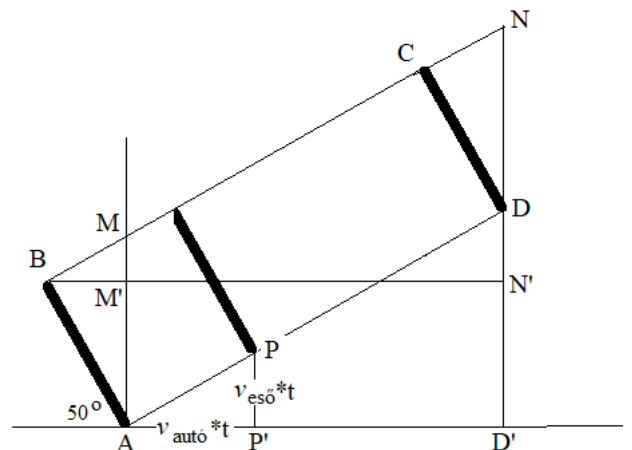
Az ábrán az autó hiányzó szélvédője induláskor AB, az autó A-tól D' pontig halad.

t idő alatt az autó $v_{\text{auto}}t$ utat, míg az eső $v_{\text{eső}}t$ utat tesz meg, így az autó szélvédőjének A pontján t idő múlva éppen az az esőcsepp halad át, ami a pillanatfelvételen a P pontban volt.

A mozgás során az autóba beeső esőcseppek az eredeti felvételen ABCD paralelogrammában vannak. Ennek területét kell minimalizálni DAD' szög alkalmazás megválasztásával.

AMB háromszöget levágva és DNC háromszöget hozzátéve, ADNМ paralelogramma adódik.

Ennek magassága állandó (AD'), így területének minimalizálása az AM alapjának minimalizálását jelenti. Minimális AM nem létezik, de annak legkisebb alsó korlátja AM', melyet annál jobban megközelítünk, minél kisebb BM'M szög, azaz PAP' szög, azaz az autóval minél *gyorsabban* kell menni, hogy a beeső eső mennyisége minél kevesebbel haladjon meg az AD'N'M' téglalapban lévő eső mennyiségét.

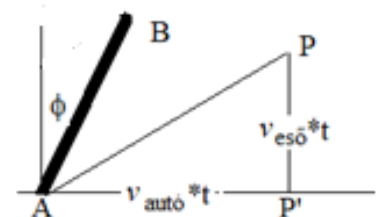


- A fenti gondolatmenet kissé egyszerűsítve itt is működik.
 $M=M'=B$ lesz. A beeső eső mennyisége a sebességtől nem függ.

- Hajoljon előre a szélvédő ϕ szöggel!

Ha a kombájn sebessége elég nagy, azaz PAP' szög $< 90^\circ - \phi$, akkor az eső beesik, ha a kombájn sebessége elég kicsi, azaz PAP' szög $\geq 90^\circ - \phi$, akkor a szélvédőhöz képest PA vektor irányából érkező eső egyáltalán nem esik be a járműbe.

A jármű teljesen száraz marad, ha **legfeljebb** $v_{\text{eső}} \cdot \tan \phi$ sebességgel halad.



.35) Anna és Béla a következő játékot játszik: kezdetben Anna egy kör alakú tóban úszik, Béla pedig a parton áll. Béla szeretné elkapni Annát, de Béla úszni nem tud. Anna a vízben legfeljebb v sebességgel tud úszni, a szárazföldön azonban gyorsabban szalad Bélánál. Béla sebessége a szárazföldön kv ($k > 1$). Anna nyer, ha a tavat elhagyva el tud szaladni Béla elől, Béla nyer, ha el tudja kapni Annát. Anna nem maradhat örökké a tóban.

Vizsgáljuk meg, kinek van nyerő stratégiája k alábbi értékei mellett. Azaz adott k esetén mondjuk meg, melyikük tud biztosan nyerni, a másikuk igyekezete ellenére is. Adjuk meg azt is, mit kell ehhez tennie (mi a győztes stratégia)!

- $k = 1,5$? (A)
- $k = 3$? (A)
- $k = 4$? (A)
- $k = 9$? (B)

Béla Annát csak Anna partot érési helyén tudja elkapni, ugyanis Anna a parton már el tud szaladni Béla elől. Ezért Bélának elég csak a *tó kerületén* szaladgálni.

.a) $k=1,5$. Ússzon Anna nagyon közel egy tóparti ponthoz. Ha ekkor B éppen akkor nincsen ott, akkor szaladjon el. Ha B akkor éppen ott van, akkor innentől ússzon Anna teljes sebességgel az *átmérő mentén a tó szemközti pontjához* és ott kímászva szaladjon el. Annának $2r$, Bélának πr távolságot kell megtennie a szemközti pontig, ami $2\frac{r}{v}$ illetve $\frac{\pi r}{1,5v}$. És $2 < \frac{\pi}{1,5}$.

.b) $k=3$. Ússzon Anna a tó közepére, nézze meg, milyen irányban látszik Béla, majd ússzon teljes sebességgel ezen *iránnyal ellentétesen, sugár mentén* a tópartra. Annának r , Bélának minimum πr távolságot kell megtennie a szemközti pontig, ami $\frac{r}{v}$ illetve $\frac{\pi r}{3v}$. És $1 < \frac{\pi}{3}$.

.c) $k=4$. Anna távolodjon a középponttól $r/k=r/4$ (biztonsági) távolságra. *Távolodása során mindig úgy helyezkedjen el, hogy Bélát folyton a középpont irányába lássa.* Ezt megteheti, hiszen Béla $k=4$ -szeres sebessége miatt Anna legfeljebb negyedakkora sugarú körön mindig el tudja fordítani a hozzá vezető sugarat akkora szöggel, amekkorával B fordítja az őhozza vezető sugarat. (Ha Anna nagyobb távolságra lenne a középponttól, ezt a helyzetet már nem tudná biztosítani).

A biztonsági kört elérve, ússzon Béla *akkori látóirányával ellentétes irányba, sugár mentén*.

Annának $3/4r$, Bélának minimum πr távolságot kell megtennie a szemközti pontig, ami $\frac{3r}{4v}$ illetve $\frac{\pi r}{4v}$. És $\frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$.

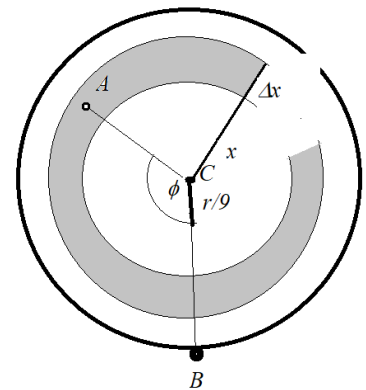
(Mj.: Ha Anna a biztonsági zónán kívül nem sugárirányba, hanem Béla (mozgását figyelve) *mindenkori* látóirányával ellentétesen úszna, akkor még inkább megmenekülne, avagy: még akkor is megmenekülhetne, ha k kicsivel több 4-nél. Ez esetben Anna pályája „spirálvonal” lenne.)

.d) $k=9$. Érezhető, hogy ha Béla nagyon gyors, akkor elkaphatja Annát, hiszen elég rövid idő alatt bármelyik tóparti pontot elérheti. Mit csinálnál Béla helyében?

Az ábra szerinti ACB konvex ϕ szöget kellene egyre kisebbé tenni, mert ha nagysága 0° lesz és Anna éppen a tóparton van, akkor Béla elkapta.

A „biztonsági zónán ($r/9$ sugarú körön) kívül mozgó Anna esetén Béla gyorsabban tudja változtatni a hozzá vezető sugár szögét mint Anna (hiszen Béla sebessége 9-szer nagyobb, ezért e szöget Béla csökkenteni tudja).

Csak hogy elég gyorsan le tudja-e Béla a szöget 0-ra csökkenteni, még azelőtt, hogy Anna partot ér?



Osszuk fel a biztonsági zónán kívüli körgyűrűt (nagyon kicsi) Δx vastagságú körgyűrűkre. Az ábra az x távolságban lévő, Δx széles körgyűrűt mutatja. Sok ilyen gyűrű van, ezek mindegyikén *belülről kifelé* át kell haladni a kijutásig. (Haladhat néha egy gyűrűn kívülről befelé is, de ezzel csak időt veszít.). Megmutatjuk, hogy **csupán azon mozgásszakaszok alatt, amíg Anna az említett körgyűrűk mindegyikén belülről kifelé végighalad, elegendő idő áll B rendelkezésére, hogy az említett szöget 0° -ra csökkentse** Anna igyekezete ellenére is.

Anna szabadon megválaszthatja a körgyűrűn belüli sebességének irányát, de sem a radiális, sem a rá merőleges érintőirányú sebesség-komponenese sem lehet v -nél nagyobb. (ui. ezek eredője is legfeljebb v .)

Anna Δt idő alatt *érintőirányba* legfeljebb $v\Delta t$ ívet mozdulhat el, amivel az ϕ szög megnövelheti, de legfeljebb csak $\frac{v\Delta t}{x}$ ívmértékkel. B pedig minden erejével igyekszik ezt csökkenteni és biztosan csökkenteni tudja ez idő alatt $9v\Delta t/r$ -rel. Így ezen Δt idő alatt a szög legalább $\frac{9v\Delta t}{r} - \frac{v\Delta t}{x} = \frac{v\Delta t}{r} \left(9 - \frac{r}{x}\right)$ pozitív ívmértékkel csökken (ui. $x > r/9$). Mekkora lehet Δt ? Legalább $\Delta x/v$ -nek kell lennie (ha éppen *sugárirányban* haladna), vagy ennél többnek. Így a ϕ szög csökkenése Δt idő alatt **legalább** $\frac{v\Delta x}{rv} \left(9 - \frac{r}{x}\right) = \frac{\Delta x}{r} \left(9 - \frac{r}{x}\right) = \frac{9}{r}\Delta x - \frac{1}{x}\Delta x$.

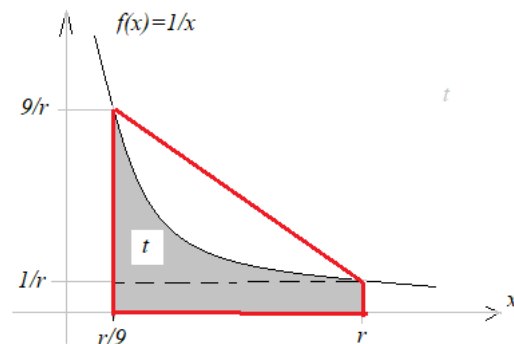
Összegezzük ezt a mozgás azon részleteire, melyek során Anna e sávokon kifelé áthalad az $x=r/9$ -es biztonsági távolságból a partot érésnek megfelelő $x=r$ távolságig.

Az elő tagok összege éppen $\frac{9}{r}r = 8$ radián.

A második tagok összegének szemléletes jelentése van: $\sum_{x=r/9}^{x=r} \frac{1}{x} \Delta x$ éppen az $f(x) = 1/x$ függvény és az x -tengely közötti síkidom területének felel meg (téglalappösszeggel közelítve azt). E területet felüliről becsülhetjük (pontosan csak integrálszámítással lenne számolható), az őt tartalmazó trapéz nála nagyobb területével:

$$\sum_{x=r/9}^{x=r} \frac{1}{x} \Delta x \approx t \leq T_{\text{trapéz}} = \frac{\frac{9}{r} - \frac{1}{r}}{2} \cdot \frac{8}{9} r = \frac{32}{9} \text{ radián.}$$

Így tehát a ϕ szög csökkenése legalább $8 \cdot 32/9 = 40/9$ radián = 254° . Mivel eredetileg a ϕ szög kezdetben (amikor kijött a biztonsági zónából) legfeljebb 180° volt, a mozgás során azt Béla biztosan 0° -ra tudja csökkenteni (még a partot érés előtt).



Béla stratégiája tehát:

- Türelemmel – akár állva - várni, amíg Anna eléri a biztonsági zónát, illetve ha később ismét visszaúszik ide.
- A biztonsági zónán kívüli Anna esetén - bármit is tesz – mindig a ϕ szög csökkentésére kell törekednie a tő kerületén való futással.
- Mikor Anna partot ér, el kell kapni.

Ezzel Béla mindig nyerhet, amikor Anna hajlandó kijönni.

Mj.: A stratégia leírásakor több durva közelítést végeztünk. Megmutatható, hogy a játék győztesét meghatározó kritikus k érték 4,6033. Legalább ekkora k érték esetén Béla nyer a most mutatott stratégiával, míg kisebb k érték esetén Anna nyer a .c) pont megjegyzésében említett stratégiájával.

.36) **Három csiga egy 60 cm oldalhosszú szabályos háromszög csúcsaiból indulva kezdenek mozogni.

Mindegyikük a neki jobb keze (szarva) felé eső csiga felé mozog minden pillanatban. Sebességük 8 cm/perc.

- Hol találkoznak? **(a háromszög középpontjában)**
- Mikor találkoznak? **(5 perc)**
- Mennyi utat tesznek meg a találkozásig? **(40 cm)**
- Mik lennének a válaszok, ha eredetileg n darab csiga indul el egy szabályos n -szög csúcsaiból? **(középen; $7,5 \text{ s}/(1-\cos(360/n))$; $60 \text{ cm}/(1-\cos(360/n))$)**
- Készítsünk szimulációt Excellel, ami kirajzolja a csigák pályáját!
- A kiindulási helyzet és a mozgás szabályai olyanok, hogy a kezdő helyzetet a háromszög középpontja körül 120° -kal elforgatva ugyanaz a mozgás zajlik le. Ezért ha egy pontban találkoznak, akkor annak 120° -os elforgatottjában is találkoznak. De találkozási pont csak egy lehet, ezért ez a pont a forgatáskor helybenmarad.
- Hogyan látja az egyik csiga a tőle jobbra álló mozgását? Mekkora a relatív sebességüknek az őket összekötő egyenes irányába eső komponense?
- Szabályos n -szög esetén is segít az eredeti gondolatmenet.
- Nagyon rövid időtartamok egymásutánjára számíttassuk ki az új helykoordinátákat, majd az úly helyzetű háromszögre ismételjük ugyanezt.

.37) **Négy csiga egy elegendően nagy síklapon már nagyon rég óta, egyenes mentén mászik, ki-ki a saját tempójában, de egyenletesen haladva. Pályáik egymást páronként metszik, de semelyik három pályának nincs közös pontja. A közöttük lehetséges 6 találkozás közül 5 már megtörtént. Vajon a 6. találkozás is le fog zajlani? (igen)

Ötlet1:

Tegyük fel, hogy már csak C és D nem találkozott.

A síkhoz rögzített K rendszerben a pályák metsző egyenesek. (Ez azonban nem jelent automatikus találkozást, hiszen annak további feltétele, hogy a közös pontban ugyanakkor legyenek.)

A K helyett használjuk az A csigára rögzített K' koordináta rendszert. Ebben A pályája az origó (egyetlen pont), a másik három pálya K' -ből nézve origón áthaladó egyenes (hiszen B, C, D már találkoztak már a folyton ott „ülő” A -val.)

Mivel már B is találkozott C-vel, mégpedig nem akkor amikor A is ott volt, ezért B és C pályájának (K' -ből nézve) van közös, origótól különböző pontja. Így *B és C pályája egybeesik* (van két közös pontjuk). Hasonlóan (B és D is találkoztak már, így) *D pályája is azonos B pályájával*.

Tehát C és D pályája K' -ből nézve ugyanaz az egyenes (mindkettő B pályája is egyben).

Mivel azonban a C és D csiga K és K' -beli sebességeinek különbsége $v_{C(K')} = v_{C(K)} + v_{K(K')}$ miatt konstans, és a K -beli sebességeik különböznek, ezért C és D csiga a K' -beli sebességvektorai is különböznek.

Tehát a C és D csiga K' -ből nézve ugyanazon a pályán, de eltérő sebességgel haladnak, ezért valamikor találkozni fognak eg K' -origójától különböző pontban (amikor A csiga nincs ott). E találkozáskor nyilván K -beli pályáik metszéspontjában tartózkodnak.

Ötlet2:

Kihasnálva, hogy a csigák csak kétdimenziós mozgást végeznek, de a 3 dimenziós térben könnyen tudunk tájékozódni, készítsünk egy háromdimenziós koordináta-rendszert, melynek x és y tengelye a csigák síkján van, harmadik (z) tengelye pedig erre merőlegesen áll, és rajta az időt tüntessük fel. Ebben a „síkidő” rendszerben egy pont egy eseményt ad meg: a csiga helyét és az ott tartózkodás idejét. Egy-egy csiga mozgásához tartozó pontok egy „vonalat” jelölnek ki, mely vonal az x - y - z koordináta-rendszerben egy egyenes, hiszen a csiga síkon való mozgása egyenes vonalú és egyenletes és a z tengelyen az időt ábrázoltuk.

(Elképzelhető úgy is, hogy rövid, de azonos időközönként pillanatfelvételeket készítünk a csigák síkbeli mozgásáról, majd helyezzük el ezeket a készítés sorrendjében a síkkal párhuzamosan. Az egyes pillanatfelvételeken ugyanannak a csigának a helyét megjelölve, adódik a fent említett egyenes „vonal”.)

A találkozás ténye két csiga között azt jelenti, hogy ugyanabban az időben ugyanott voltak, azaz e háromdimenziós koordináta-rendszerben (x,y,t) koordinátahármasaik megegyeznek, tehát a „vonal”aik metszik egymást.

Egy csiga „vonal”át az x - y síkra merőlegesen vetítve a csiga pályája adódik.

Bármely két csiga x - y síkon lévő pályája metszi egymást, ámde „vonal”aik csak pontosan akkor metszőek, ha a csigák valamikor találkoznak(tak).

Az eredeti feladat feltételei szerint a négy csiga „vonal” úgy helyezkedik el, hogy páronként legfeljebb 1 közös pontjuk van (ha találkoznak), de három „vonal”nak nincs közös pontja (u.i. 3 pályának nincs közös pontja). Sőt, *párhuzamos csiga „vonal”ak nem lehetségesek*, mert hozzájuk (merőleges vetítés után) párhuzamos csigapályák tartoznának az x - y síkon.

Továbbá 5 „vonal” metszéspont biztosan van. Kérdés, hogy ekkor a 6. is létezik-e?

Csupán egy „vonal”-metszéspont létében nem lehetünk biztosak, legyen ez C és D csigáé.

Ekkor A, B és C már megvalósult kölcsönös találkozásai miatt csiga „vonal”aik egymást páronként metszik, így az x - y - z térben közös síkban vannak (a metszéspontok által meghatározott síkban).

Ámde ezen síkon van a C és D csiga „vonal”aknak az a két pontja is, ami A és B csigával való találkozásához tartozik. Ezért a C és D csiga „vonal”ak teljes egészében A, B, C „vonal”ak síkjában van. De C és D „vonala” nem párhuzamos. Így metszik egymást, azaz valamikor, valahol találkozik C és D csiga.